

4.1. POSTAC OGÓLNA I KANONICZNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Postać ogólna funkcji kwadratowej (trójmian kwadratowy):

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ - **wyróżnik trójmianu kwadratowego (delta):**

Przykład 4.1.1. Wypisz współczynniki podanych funkcji kwadratowych:

a) $y = 2x^2$

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 2; b = 0; c = 0$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej. Ponieważ we wzorze funkcji nie ma wyrażenia z x i wyrazu wolnego, dlatego $b = 0; c = 0$

b) $y = x^2 - x + 3$

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 1; b = -1; c = 3$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej.

Przykład 4.1.2. Oblicz wyróżniki trójmianu kwadratowego: $y = 2x^2 + 3x$

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 2; b = 3; c = 0$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej.
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 9$	Współczynniki a, b, c wstawiamy do wzoru na deltę $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ i obliczamy.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej: $y = a(x - p)^2 + q$

gdzie $p = \frac{-b}{2a}; q = \frac{-\Delta}{4a}$ są współrzędnymi **wierzchołka**

$W = (p, q)$ **paraboli**, która jest wykresem funkcji kwadratowej

Przykład 4.1.3. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli:

a) $y = (x - 2)^2$

Rozwiązanie	Komentarz
$W = (2, 0)$	Z postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$ funkcji kwadratowej odczytujemy p i q oraz zapisujemy współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$.

b) $y = (x + 1)^2 - 3$

Rozwiązanie	Komentarz
$W = (-1, -3)$	Z postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$ funkcji kwadratowej odczytujemy p i q oraz zapisujemy współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$.

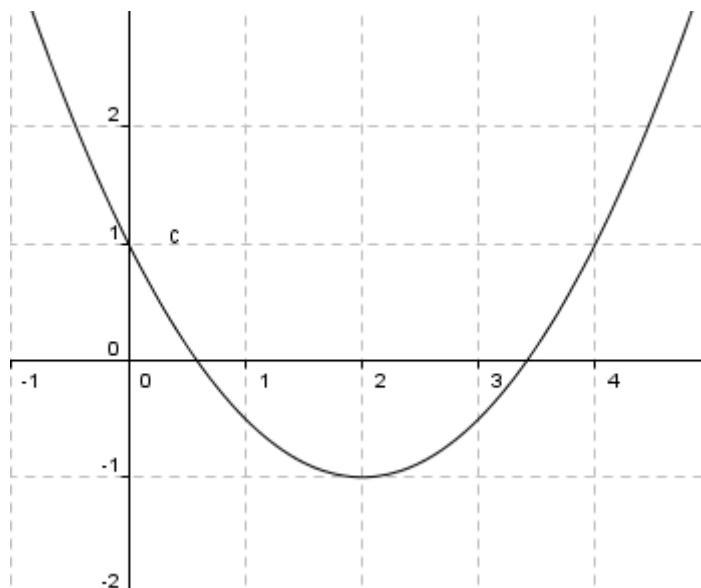
Przykład 4.1.4. Zapisz podaną funkcję w postaci ogólnej: $y = (x - 3)^2 + 2$.

Rozwiązanie	Komentarz
$y = (x - 3)^2 + 2$ $y = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 2$ $y = (x^2 - 6x + 9) + 2$	Stosując wzór skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ wyrażenie $(x - 3)^2$ zapisujemy w postaci $x^2 - 6x + 9$.
$y = x^2 - 6x + 11$ - postać ogólna	Wykonując redukcję wyrazów podobnych otrzymujemy postać ogólną funkcji kwadratowej.

Przykład 4.1.5. Zapisz podaną funkcję w postaci kanonicznej: $y = x^2 - 2x - 1$.

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 1; b = -2; c = -1$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczamy Δ .
$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$ $q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-8}{4 \cdot 1} = -2$	Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli korzystając ze wzorów $p = \frac{-b}{2a}; q = \frac{-\Delta}{4a}$
$y = (x - 1)^2 - 2$	Stosując wzór $y = a(x - p)^2 + q$ zapisujemy funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

Przykład 4.1.6. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji kwadratowej.
Podaj wzór tej funkcji.



Rozwiązanie	Komentarz
$W = (2, -1)$	Z wykresu funkcji odczytujemy współrzędne wierzchołka .
$y = a(x - 2)^2 - 1$	Odczytane p i q wstawiamy do wzoru $y = a(x - p)^2 + q$
$(0, 1)$	Z wykresu odczytujemy punkt przecięcia paraboli z osią OY
$1 = a(0 - 2)^2 - 1$ $1 = 4a - 1$ $-4a = -2$ $a = \frac{1}{2}$	Współrzędne punktu $(0, 1)$ wstawiamy z x i y w równaniu $y = a(x - 2)^2 - 1$ i obliczamy a .
$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$	Zapisujemy funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 4.1.1. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli

- (1pkt.) $y = (x + 3)^2$
- (1pkt.) $y = (x - 3)^2 + 4$
- (1pkt.) $y = 2x^2 - 1$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie współrzędnych wierzchołka paraboli.	1

Ćwiczenie 4.1.2. (2pkt.) Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 4x$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie Δ .	1
2	Podanie współrzędnych wierzchołka W .	1

Ćwiczenie.4.1.3. (2pkt.) Zapisz funkcję $y = x^2 + 5x - 3$ w postaci kanonicznej.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie p i q .	1
2	Zapisanie funkcji w postaci kanonicznej	1

Ćwiczenie 4.1.4. (3pkt.) Napisz równanie ogólne paraboli wiedząc, że przechodzi ona przez punkt $(3,0)$ oraz jej wierzchołek $W = (2,1)$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równania paraboli w postaci kanonicznej	1
2	Podanie współczynnika a	1
3	Podanie postaci ogólnej.	1